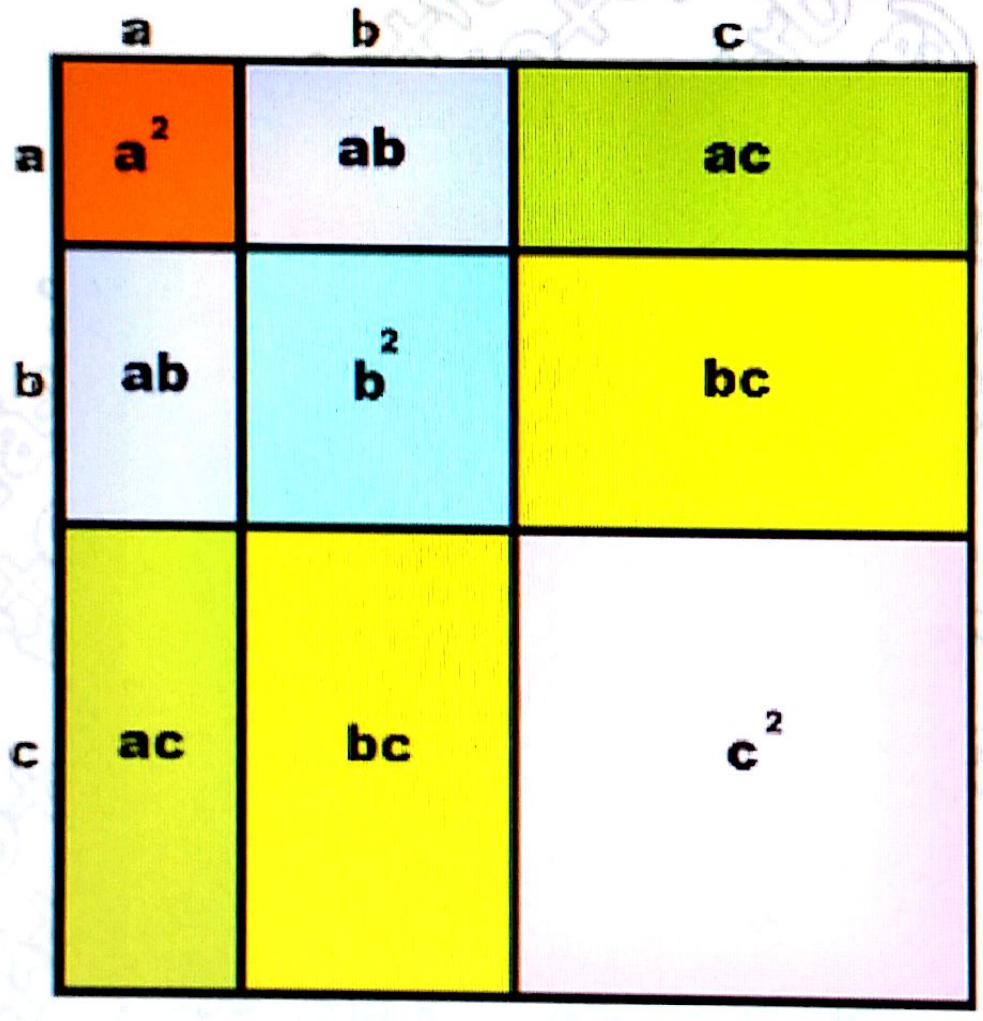
فصل ۵

عبارت‌های جبری

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$$



استفاده از شکل‌های هندسی برای اثبات تساوی‌های جبری سابقه‌ای دیرینه دارد. ریاضی‌دانان دورهٔ اسلامی ـ ایرانی از پیشگامان این کار بوده‌اند.

فعالیت

هر عبارت را، که به‌صورت حاصل‌ضرب یک عدد حقیقی در توان‌های صحیح و نامنفیِ یک یا چند متغیر باشد، یک جمله‌ای می‌نامیم.

عبارت‌های زیر همگی یک جمله‌ای هستند.

$$۷\ ,\ x\ ,\ ۵x^{۱۰}\ ,\ -\sqrt{۳}a^{۳}x^{۲}z\ ,\ \frac{۱}{۵}xy\ ,\ \pi x^{۲}\ ,\ ۴z\ ,\ -\frac{۲}{۷}$$

و عبارت‌های زیر یک جمله‌ای نیستند.

$$\frac{۱}{x}\ ,\ ۳^{x}\ ,\ ۲\sqrt{x}\ ,\ |x|\ ,\ ۲x^{۲}+۲x\ ,\ \sqrt[۳]{y}\ ,\ ۱+x$$

هرگاه یک جمله‌ای‌ها دارای عبارت‌های حرفی یکسان باشند، به آنها یک جمله‌ای‌های متشابه گفته می‌شود؛ به عنوان مثال یک جمله‌ای‌های $۴x^{۲}y$ و $\frac{۷}{۲}x^{۲}y$ و $-۳x^{۲}y$ متشابه‌اند اما یک‌جمله‌ای‌های $۳x$ و $۳x^{۲}$ متشابه نیستند.

۱ــ حاصل عبارت‌های زیر را مانند نمونه به‌دست آورید :

۱) $۲(-۴x\times۷x^{۲}) = ۲(-۲۸x^{۳})=-۵۶x^{۳}$

۲) $(\frac{۲}{۳}x^{۲}y)^{۳} = (\frac{۲}{۳})^{۳}.(x^{۲})^{۳}.y^{۳} = \frac{۸}{۲۷}x^{۶}y^{۳}$

۳) $(-۳x^{۳})^{۲}(\frac{۱}{۳}x^{۲})^{۳} = ۹x^{۶}\times\frac{۱}{۲۷}x^{۶} = \frac{۱}{۳}x^{۱۲}$

۴) $(\frac{۱}{۲}a^{۲}b)(ab)(\frac{-۲}{۷}a^{۲}c^{۵}) = \frac{-۱}{۷}a^{۵}b^{۲}c^{۵}$

۵) $۲(۵xy^{۲})^{۲}(-۲x^{۵}y^{۲}) = (۲\times۲۵x^{۲}y^{۸})(-۲x^{۵}y^{۲}) = -۱۰۰x^{۷}y^{۱۰}$

۶) $(۲x^{۲}y)(۳x^{۲}y^{۳}) + xy^{۳}(-۵x^{۲}y) = ۶x^{۴}y^{۴} - ۵x^{۴}y^{۴} = x^{۴}y^{۴}$

در یک جمله‌ای $۵a^{۲}x^{۳}y$، توان متغیر a برابر با ۲ است؛ بنابراین درجهٔ این یک جمله‌ای نسبت به متغیر a، برابر با ۲ است؛ به همین ترتیب درجه نسبت به x، ۳ و درجه نسبت به y، ۱ است. درجه نسبت به دو متغیر x و y را برابر با ۴= ۳+۱ تعریف می‌کنیم.

۲ــ جدول زیر را مانند نمونه کامل کنید.

یک جمله‌ای	متغیرها	درجه نسبت به x	درجه نسبت به y	درجه نسبت به x و y
$\sqrt{۳}a^۳x^۲y^۴$	a , x , y	۲	۴	۲+۴=۶
$۵x^۲y^۲z^۲$	x , y , z	۲	۲	۲+۲=۴
$-۱۲x^۳u$	x , u	۳	۰	۳+۰=۳
$\frac{۳}{۵}$	—	۰	۰	۰

یک جمله‌ای‌های $۳x^۲y^۳$ و $-۵x^۲y^۲$ را که متشابه نیستند، یک جمله‌ای‌های غیرمتشابه می‌گوییم.

چنانچه تعدادی یک جمله‌ای را با یکدیگر جمع جبری (جمع یا تفریق) کنیم، حاصل، چند جمله‌ای است. چند جمله‌ای می‌تواند یک جمله‌ای یا جمع جبری چند یک جمله‌ای غیرمتشابه باشد؛ مانند :

$$۴x^۲-۴x+۱ \quad , \quad x^۲-۲x \quad , \quad \frac{۲}{۳}ax^۲y-\frac{۳}{۲}axy^۲-axy \quad , \quad ۳x^۴$$

در هر چند جمله‌ای، درجه نسبت به یک متغیر را برابر با بزرگ‌ترین درجه نسبت به آن متغیر تعریف می‌کنیم؛ برای مثال در چند جمله‌ای $-۲xy^۳ + x^۲y - ۱$ ، درجه نسبت به x برابر با ۲ و درجه نسبت به y برابر با ۳ است. همچنین درجه نسبت به چند متغیر را، بزرگ‌ترین درجهٔ یک جمله‌ای‌های آن نسبت به متغیرهای موردنظر تعریف می‌کنیم. در این مثال درجه نسبت به y و x برابر با ۴ است.

معمولاً در چند جمله‌ای‌ها، جملات را نسبت به توان‌های نزولی (از بزرگ به کوچک) یک متغیر مرتب می‌کنند.

۳ــ چند جمله‌ای‌های زیر را مانند نمونه نسبت به متغیر x مرتب کنید :

الف) $۳x^۲ + ۵ - ۲x + ۲x^۳ = ۲x^۳+۳x^۲-۲x+۵$

ب) $-۳bxy^۳+ax^۲y-۴bx^۲y^۲$

ج) $\frac{۱}{۲}x^۲y^۲ - ۲xy^۳ + ۳x^۳y - ۴ = ۳x^۳y+\frac{۱}{۲}x^۲y^۲-۲xy^۳-۴$

$= -۴bx^۳y^۲+ax^۲y-۲bxy^۳$

کار در کلاس

عبارت‌های جبری زیر را ساده و سپس آنها را نسبت به توان‌های نزولی x مرتب کنید.

الف) $-۵a^۲-۳ax+x^۲-[۴a^۲+۵ax-(۳a^۲-۸ax)]=$

$-۵a^۲-۳ax+x^۲-[۴a^۲+۵ax-۳a^۲+۸ax] = -۵a^۲-۳ax+x^۲-۴a^۲-۵ax$

$+۳a^۲-۸ax = x^۲-۱۶ax-۶a^۲$

$4x^5+4x^4-4x^3+x^2+4x$

ب) $(4x+5x^2)(x^3-x+1)=4x^4-4x^2+4x+5x^5-5x^3+5x^2=$

ج) $(x+x^2)(x^2+x^2+1)=x^4+x^5+x^4+x^3+x^2+x$

د) $(x^2-2x+1)(x^2+x^2-2)=x^5-x^4-x^3-x^2+4x-2$

فعالیت

۱ــ به ازای مقادیر داده شده برای x، جدول زیر را کامل کنید :

x	x^2	$6x$	x^2+6x+9	$(x+3)^2$
-2	۴	-12	$4-12+9=1$	$(-2+3)^2=1$
۰	۰	۰	۹	۹
۵	۲۵	۳۰	$25+30+9$	۴۹
$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{4}$	$6\times\frac{3}{2}=9$	$\frac{9}{4}+9+9=\frac{81}{4}$	$(\frac{3}{2}+3)^2=\frac{81}{4}$

مقدارهای دو ستون آخر جدول را با هم مقایسه کنید؛ نتیجه چیست؟ برابرند

حاصل عبارت‌های جدول را برای چند مقدار دیگر x ادامه دهید.

با توجه به مقادیر به‌دست آمده در دو ستون آخر جدول، چه حدسی می‌زنید؟ دو ستون آخر با هم برابرند.

حاصل عبارت جبری $(x+3)^2$ را به‌دست آورید و آن را با عبارت جبری x^2+6x+9 مقایسه کنید.

$(x+3)^2=(x+3)(x+3)=x^2+3x+3x+9=x^2+6x+9$

> اگر دو عبارت جبری به‌گونه‌ای باشد که به ازای هر مقدار برای متغیرهایشان حاصل یکسانی داشته باشد، برابری جبری حاصل از آنها را اتحاد جبری می‌نامیم.

بنابراین برابری $(x+3)^2=x^2+6x+9$ یک اتحاد است.

برابری $3x-3=x+1$ را درنظر بگیرید. مقدار دو طرف تساوی را به ازای $x=2$، به‌دست آورید. $3\times2-3=2+1$

آیا این برابری یک اتحاد است؟ برقراری این تساوی را به ازای چند مقدار دیگر برای x بررسی کنید. نه‌خیر

همان‌طور که می‌دانید به چنین برابری‌هایی معادله گفته می‌شود.

۲ــ حاصل عبارت‌های زیر را مانند نمونه به‌دست آورید.

الف) $(a+4)^2=(a+4)(a+4)=a^2+4a+4a+16=a^2+8a+16$

ب) $(5x+2)^2=(5x+2)(5x+2)=25x^2+10x+10x+4=25x^2+20x+4$

ج) $(a+b)^2=(a+b)(a+b)=a^2+ab+ab+b^2=a^2+2ab+b^2$

۳ــ با دقت در برابری $(5x+2)^2=25x^2+20x+4$، که در فعالیت ۲ به‌دست آمده است به سؤال‌های زیر پاسخ دهید :

ــ جمله اول سمت راست برابری یعنی $25x^2$ چه رابطه‌ای با $5x$ دارد؟

ــ جمله دوم سمت راست برابری یعنی $20x$ چه رابطه‌ای با ۲ و $5x$ دارد؟

ــ جمله سوم سمت راست برابری یعنی ۴ چه رابطه‌ای با ۲ دارد؟

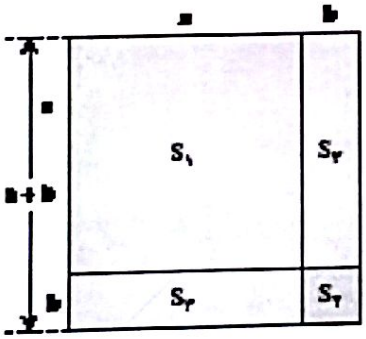
عبارت جبری $5x+2$ دو جمله‌ای و $(5x+2)^2$ را مربع دو جمله‌ای می‌نامیم و برای سرعت بخشیدن به عملیات جبری می‌توان مربع دو جمله‌ای را به‌صورت زیر محاسبه کرد :

$$(5x+2)^2=(5x)^2+\underbrace{2\times 5x\times 2}+2^2$$

جملهٔ اول — جملهٔ دوم — مربع جملهٔ اول — دو برابر حاصل‌ضرب دو جمله — مربع جملهٔ دوم

برای هر دو عدد مثبت a و b، به کمک مساحت‌های مشخص شده در شکل زیر، درستی اتحاد مقابل را نشان دهید.

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$



مساحت کل شکل $=(a+b)^2=S_1+2S_4+S_2$

$=a^2+2ab+b^2$

۴ــ مانند سؤال ۲ فعالیت، طرف دوم تساوی‌های زیر را بنویسید.

الف) $(5x-2)^2=(5x-2)(5x-2)=25x^2-10x-10x+4=25x^2-20x+4$

ب) $(3x-5x)^2=(3x-5x)(3x-5x)=(-2x)(-2x)=4x^2$

ج) $(a-b)^2=(a-b)(a-b)=a^2-ab-ab+b^2=a^2-2ab+b^2$

ارتباط بین جملات به‌دست آمده در طرف راست تساوی‌های بالا و جملات عبارت داده شده در سمت چپ آنها را بیان کنید.

اتحاد مربع دو جمله‌ای :

برای هر دو عدد حقیقی a و b داریم : $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$

$(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$

کار در کلاس

۱ــ مربع دو جمله‌ای‌های زیر را با توجه به اتحاد مربع دو جمله‌ای به‌دست آورید.

الف) $(2x+1)^2 = 4x^2+4x+1$ ب) $(4a+3b)^2 = 16a^2+24ab+9b^2$

ج) $(x^2-\frac{1}{2})^2 = x^4-x^2+\frac{1}{4}$ د) $(2xy-\frac{1}{2}x^3)^2 = 4x^2y^2-2x^4y+\frac{1}{4}x^6$

هـ) $(\sqrt{2}+3\sqrt{3})^2 = 29+6\sqrt{6}$ و) $(5-2\sqrt{2})^2 = 25-20\sqrt{2}+8 = 33-20\sqrt{2}$

۲ــ جاهای خالی را با توجه به نمونه پُر کنید.

الف) $(\underbrace{2a}+\underbrace{3b^2})^2 = \underbrace{4a^2}+\underbrace{12ab^2}+\underbrace{9b^4}$

جملهٔ اول — جملهٔ دوم — مربع جملهٔ اول — دو برابر حاصل‌ضرب جمله‌ها — مربع جملهٔ دوم

جمله اول $= 2a \Rightarrow$ مربع جمله اول $= 4a^2 = (2a)^2$

دو برابر حاصل‌ضرب جمله‌ها $= 2(2a)(3b^2) = 12ab^2$

در نتیجه داریم : $(2a+3b^2)^2 = 4a^2+12ab^2+9b^4$

الف) $(1+b)^2 = 1+2b+b^2$ ب) $(xy-\frac{1}{2})^2 = x^2y^2-xy+\frac{1}{4}$

ج) $(x^2-\frac{1}{x^2})^2 = x^4-2+\frac{1}{x^4}$ $(x\neq 0)$ د) $(6x-y)^2 = 36x^2-12xy+y^2$

فعالیت

در سال گذشته خاصیت پخشی عمل ضرب نسبت به عمل جمع را در چند جمله‌ای‌ها مطالعه کرده‌اید.

$$a(b+c) \xrightarrow{\text{حاصل‌ضرب}} ab+ac$$

اکنون اگر این برابری را مانند زیر به صورت حاصل‌ضرب دو عبارت بنویسیم، دو جمله‌ای ab+ac را به حاصل‌ضرب عبارت‌ها تجزیه کرده‌ایم :

تجزیه

$ab+ac=a(b+c)$

(ب.م.م) بزرگ‌ترین مقسوم علیه (عامل) مشترک

چند جمله‌ای‌های زیر را مانند نمونه تجزیه کنید :

الف) $8x^2+12x=4x.2x+4x.3$

$4x$=(ب.م.م)

$=4x(2x+3)$ (با توجه به خاصیت پخشی)

ب) $6a^4-18a^3=$

ج) $7x^4-14x^3+21x^2=7x^2\times x^2-7x^2\times 2x+7x^2\times 3=7x^2(x^2-2x+3)$

د) $5x^2y-10xy^2+15x^2y=$

کار در کلاس

اگر سه جمله‌ای $a^2+2ab+b^2$ را به کمک اتحاد مربع دو جمله‌ای به‌صورت $(a+b)^2$ بنویسیم در واقع عبارت را به عامل‌های ضرب تجزیه کرده‌ایم؛ زیرا :

تجزیه

$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2=(a+b)(a+b)$

با توجه به نمونهٔ زیر توضیح دهید که چگونه در سه جمله‌ای داده شده، جمله‌های اتحاد را تشخیص می‌دهید تا به کمک آن عبارت تجزیه شود.

الف) $x^2+6x+9=(x+3)^2=(x+3)(x+3)$

مربع کامل $2(x)(3)$ مربع کامل

ب) $x^2-4x+4=$

ج) $n^2-10n^2+25=$

د) $8ax^2+24axy+18ay^2=2a(4x^2+12xy+9y^2)=$

$2a$=(ب.م.م)

پاسخ تمرین صـ ۸۶

سؤال ۱

① $2am^2 \times (-8m^3) - \frac{1}{4}m^2 \times (-8m^3) = -200m^5 + 2m^5 = -198m^5$

② $7a^3 - 4b^3 + 5c^3 - a^3 + 9b^3 + 11c^3 = 6a^3 + 5b^3 + 16c^3$

③ $x^{2m} - 2x^m + 1$

④ $x - [y - x - y + 1] = x + x - 1 = 2x - 1$

$h^2 = 9m^6n^2 - m^6n^2 = 8m^6n^2$

$h = m^3n\sqrt{8}$ ارتفاع ذوزنقه

سؤال ۲

① محیط $= 3m^2n + 2m^2n + 5m^2n + 3m^2n + 3m^2n + 2m^2n = 18m^2n$

مساحت $= 3m^2n \times 2m^2n + \frac{m^2n\sqrt{8}(3m^2n + 5m^2n)}{2} = 6m^4n^2 + 8m^4n^2\sqrt{8}$

② ابتدا با استفاده از رابطه فیثاغورس ضلع مثلث را محاسبه می‌کنیم

$25x^2y^2 = 9x^2y^2 + (\text{ضلع مثلث})^2$

$(\text{ضلع مثلث})^2 = 25x^2y^2 - 9x^2y^2 = 16x^2y^2 \longrightarrow$ ضلع مثلث $= 4xy$

محیط $= 3xy + 2 \times 4xy + 4xy + 5xy = 20xy$

مساحت $= 3xy \times 4xy + 3xy \times 4xy \times \frac{1}{2} = 12x^2y^2 + 6x^2y^2 = 18x^2y^2$

سؤال ۳

۱) $25y^2 - 30xy + 9x^2$

۲) $9a^4 + 6a^2 + a^2$

۳) $24x^2 - \frac{16}{3}x + \frac{1}{9}$

۴) $(2,7 + 3,1c)^2 = 4^2 = 16$

طرف دوم $= x^2 + 2xy + y^2 - x^2 + 2xy - y^2 = 4xy$ الف طرف اول

طرف اول $= a^2 + 2 + \frac{1}{a^2} - 2 = a^2 + \frac{1}{a^2}$ طرف دوم ③

تمرین

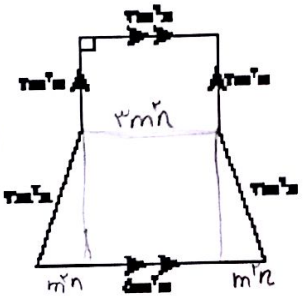
۱ــ عبارت‌های جبری زیر را ساده کنید.

الف) $(-5m)^2(-2m)^3-(\frac{1}{2}m)^2(-2m)^3$ ب) $7a^2-4b^2+5c^2-(a^2-9b^2-11c^2)$

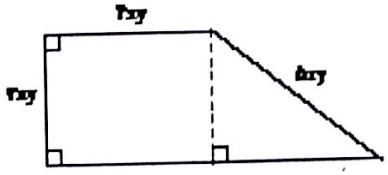
ج) $(x^m-1)(x^m-1)$ د) $x-[(y-x)-(y-1)]$

۲ــ محیط و مساحت هر شکل را بیابید.

الف)



ب)



۳ــ طرف دیگر عبارت‌های زیر را با استفاده از اتحادها به‌دست آورید.

الف) $(5y-3x)^2=$ ب) $(-3a^2-a)^2=$

ج) $(8x-\frac{1}{3})^2=$ د) $(2/7)^2+2(2/7)(3/3)+(3/3)^2=$

۴ــ به کمک اتحاد مربع دو جمله‌ای، درستی تساوی‌های زیر را ثابت کنید.

الف) $(x+y)^2-(x-y)^2=4xy$ ب) $a^2+\frac{1}{a^2}=(a+\frac{1}{a})^2-2 \quad (a\neq 0)$

۵ــ عبارت‌های جبری زیر را تجزیه کنید.

الف) $2x^3+8x^2+8x=$ ب) $3a^2b-12ab^2+a^2b^2=$

ج) $a(x+1)+b(x+1)^2=$ د) $a^3-2a^2+a=$

هـ) $x^2y^2-4xy+4=$ و) $25x^4+30x^3+9x^2=$

۶ــ با تبدیل b به $-b$ در اتحاد $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$، طرف دوم تساوی زیر را کامل کنید.

$$\underbrace{(a+(-b))^2}_{(a-b)^2}=$$

فعالیت

۱ــ حاصل عبارت زیر را به دو روش انجام داده‌ایم؛ آنها را کامل کنید.

روش اول: $(a+b+c)^2=(a+b+c)(a+b+c)=a^2+ab+ac+ba+b^2+bc+ac+bc+c^2=$
$a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$

روش دوم: $((a+b)+c)^2=(a+b)^2+2(a+b)c+c^2=a^2+2ba+b^2+2ac+2bc+c^2=$
$a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$

به کمک نتیجهٔ این فعالیت، حاصل عبارات زیر را به‌دست آورید.

$(a+b-c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab-2bc-2ac$

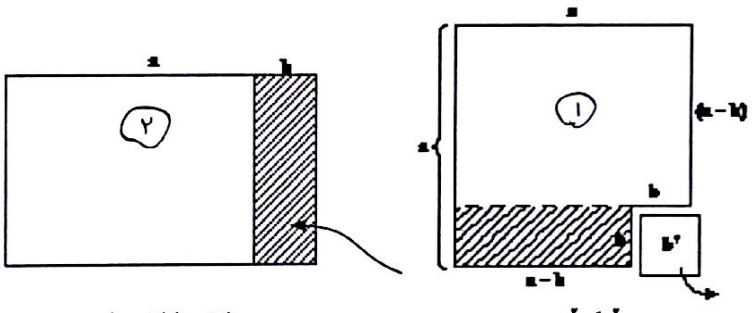
۲ــ با استفاده از ضرب عبارت‌های جبری، حاصل عبارت زیر را به‌دست آورید.

$(a+b)(a-b)=a^2-ab+ab-b^2=a^2-b^2$

اتحاد مزدوج $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

این اتحاد را به‌صورت کلامی بیان کنید. مربع جمله اول منهای مربع جمله دوم

اگر a و b مثبت و $b<a$ باشد به کمک شکل‌های زیر درستی اتحاد $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ را نتیجه بگیرید.



$S_2=(a-b)(a+b)$ $S_1=a^2-b^2$

قسمت ها شور خورده از شکل ① را برداشتیم و به سمت راست آن اضافه می‌کنیم تا شکل ② حاصل شود. مساحت شکل ② را بدست می‌آوریم. که مساحت هر دو برابر است.

کار در کلاس

۱ــ تساوی‌های زیر را با استفاده از اتحاد مناسب کامل کنید.

۱) $(1+a)(1-a)=1-a^2$

۲) $(2a+5)(2a-5)=4a^2-25$

۳) $(t+3)(t-3)=t^2-9$

۴) $(a-b-c)^2=a^2+b^2+c^2-2ab-2ac+2bc$

۲ــ حاصل عبارت‌های زیر را مانند نمونه با استفاده از اتحاد مزدوج به‌دست آورید.

۱) $(۱۰-x)(x+۱۰)=(۱۰-x)(۱۰+x)=۱۰۰-x^۲$

۲) $(-y-۲z)(-۲z+y)=(\underline{-۲z}-y)(-۲z+y)=۴z^۲-\underline{y^۲}$

۳) $(-۷y+t)(t+۷y)=(t-۷y)(t+۷y)=t^۲-۴۹y^۲$

۴) $(-۴y-۲z)(۲z-۴y)=(-۴y-۲z)(-۴y+۲z)=۱۶y^۲-۴z^۲$

۵) $(x-۲y+۵)(x+۲y-۵)=[x-(۲y-۵)][x+(۲y-۵)]=x^۲-(۲y-۵)^۲=x^۲-(۴y^۲-۲۰y+۲۵)=$

$x^۲-۴y^۲+۲۰y-۲۵$

فعالیت

اتحاد مزدوج در تجزیه عبارت‌های جبری نیز استفاده می‌شود.

$A^۲-B^۲=(A+B)(A-B)$

با توجه به این تساوی، جای خالی را پر کنید.

۱) $x^۲-۹=(x+۳)(x-۳)$

۲) $۴y^۲-\frac{۱}{۴}z^۴=(۲y+\frac{۱}{۲}z^۲)(۲y-\frac{۱}{۲}z^۲)$

۳) $(۲x+۱)^۲-y^۲=[(۲x+۱)-\underline{y}][(۲x+۱)+y]$

۴) $۱-(۳a+z)^۲=[۱-(۳a+z)][۱+(۳a+z)]$

$=(۱-۳a-z)(۱+۳a+z)$

۵) $(۲x+۱)^۲-(۳x+۴)^۲=[(۲x+۱)-(۳x+۴)][(۲x+۱)+(۳x+۴)]$

$=(-x-۳)(۵x+۵)$

۶) $x^۴-y^۴=(x^۲+y^۲)(x^۲-y^۲)$

$=(x^۲+y^۲)(x+y)(x-y)$

کار در کلاس

۱ــ محسن قصد دارد عبارت جبری زیر را تجزیه کند.

$۴x^۲-(۷-۳y)^۲$

محسن با توجه به شکل عبارت جبری به فکر استفاده از اتحاد مزدوج می‌افتد و این عبارت را به کمک این اتحاد به‌صورت زیر تجزیه می‌کند.

$(۲x-۷+۳y)(۲x+۷-۳y)$

$A=2m \quad , \quad B=7-3y \Rightarrow (2m-(7-3y))(2m+(7-3y))$

به‌نظر شما، محسن در استفاده از اتحاد مزدوج، A و B را چگونه انتخاب کرده است؟

۲ــ استفاده از اتحادها، می‌تواند بعضی از محاسبات به‌ظاهر مشکل را به راحتی امکان‌پذیر کند.

به کمک اتحادها، تساوی‌های زیر را کامل کنید.

$98\times102=(100-2)\times(100+2)=100^2-4=10000-4=9996$

$497\times503=(500-3)\times(500+3)=500^2-9=250000-9=249991$

$(1001)^2=(1000+1)^2=1000^2+2000+1=1000000+2001=1002001$

فعالیت

۱ــ به تساوی‌های زیر دقت کنید. توضیح دهید عبارت سمت راست چگونه به‌دست آمده است. بین جواب و عبارت سمت چپ چه ارتباطی وجود دارد؟

الف) $(x+2)(x+5)=x^2+5x+2x+10=x^2+7x+10$

حاصل‌ضرب غیرمشترک‌ها 2×5 ← $2+5$ حاصل جمع غیرمشترک‌ها ضربدر مشترک

ب) $(x+9)(x-4)=x^2+9x-4x-36=x^2+5x-36$

با توجه به عبارات بالا تساوی زیر را کامل کنید.

$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$

اتحاد به‌دست آمده را **اتحاد جمله مشترک** می‌نامند.

۲ــ با توجه به فعالیت ۱ اگر طرف راست عبارت بالا را داشته باشیم و بخواهیم آن‌را به حاصل‌ضرب دو عبارت تجزیه کنیم، اعداد a و b را چگونه تشخیص دهیم؟

$x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$

الف) $x^2+7x+10=(x+2)(x+5)$

ب) $x^2+7x+12=(x+3)(x+4)$

ج) $y^2+y-6=(y+3)(y-2)$

د) $y^2-y-6=(y+2)(y-3)$

هـ) $y^2+5y+6=(y+2)(y+3)$

۳ـ تجزیه عبارت $x^2+10x-24$ را چهار نفر از دانش‌آموزان به کمک اتحاد جمله مشترک به چهار صورت زیر انجام داده‌اند. کدام‌یک درست و کدام‌یک نادرست است؛ چرا؟

$(x+12)(x-2)$: جواب نفر سوم درست

$(x-12)(x+2)$: جواب نفر چهارم نادرست

$(x+6)(x-4)$: جواب نفر اول نادرست حاصل جمع ۱۰ نمی‌شود.

$(x+6)(x+4)$: جواب نفر دوم نادرست حاصل ضرب ۲۴- نشده

حاصل جمع ۱۰+ نشده

تمرین

۱ـ حاصل عبارت‌های زیر را با استفاده از اتحادها به‌دست آورید.

الف) $(\frac{1}{4}-x)(\frac{1}{4}+x)=\frac{1}{16}-x^2$

ب) $(5x+4)(5x+3)=25x^2+35x+12$ ← شبیه اینو در فعالیت نداشتیم

ج) $(z-\sqrt{3})(z+\sqrt{3})=z^2-3$

د) $(3x+y-z)(3x+y+z)=$ $(3x+y)^2-z^2=9x^2+6xy+y^2-z^2$

هـ) $(x-1)(x+1)(x^2+1)=(x^2-1)(x^2+1)=x^4-1$

و) $(x-2)(x+2)(x^2+3)=(x^2-4)(x^2+3)=x^4-x^2-12$

۲ـ در قسمت‌های نقطه‌چین، با استفاده از اتحادها، عبارت‌های مناسب بگذارید.

الف) $(xy-z)(xy+z)=x^2y^2-z^2$

ب) $(\frac{1}{2}y+\sqrt{5})(\frac{1}{2}y-\sqrt{5})=\frac{1}{4}y^2-5$

ج) $(x+a)(x-b)=x^2-bx+ax-ab$

د) $(x^2+10)(x^2-5)=x^4+2x^2-35$

۳ـ عبارات زیر را به کمک اتحادها، تجزیه کنید.

الف) $a^2-8a+15=(a-3)(a-5)$

ب) $x^2+x+\frac{1}{4}=(x+\frac{1}{2})^2$

ج) $x^2+10x+24=(x+6)(x+4)$

د) $x^2-2x-8=(x-4)(x+2)$

هـ) $4ax^2-a$

و) $x^2-13x+36=(x-4)(x-9)$

ز) $x^2-12x+36=(x-6)(x-6)=(x-6)^2$

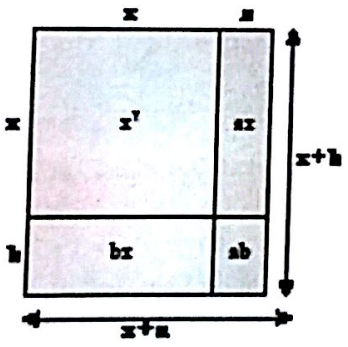
ح) $(x+y)^2-9=(x+y-3)(x+y+3)$

ط) $bx^2-5bx-50b=b(x^2-5x-50)=b(x-10)(x+5)$

ی) $x^4-5x^2+4=(x^2-1)(x^2-4)=(x+1)(x-1)(x-2)(x+2)$

۴ـ در اتحاد جمله مشترک اگر a=b باشد، چه اتحادی به‌دست می‌آید؟ اگر a و b قرینه باشد، کدام اتحاد به‌دست می‌آید؟ در پایین

۵ـ به کمک مساحت‌ها در شکل روبه‌رو، اتحاد جمله مشترک را به‌دست آورید.



$S=(x+a)(x+b)=x^2+ax+bx+ab$

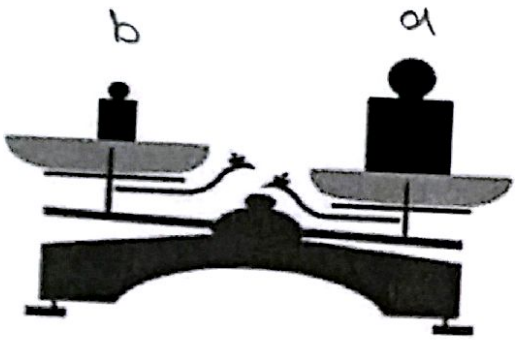
$=x^2+x(a+b)+ab$

۴

$(x+a)(x+b)\xrightarrow{a=b}(x+a)(x+a)=(x+a)^2$

$(x+a)(x+b)\xrightarrow{a=-b}(x+a)(x-a)=x^2-a^2$

فعالیت



روی کفه‌های ترازو دو وزنه a و b کیلوگرمی قرار دارد.

با توجه به شکل، وزنه a از وزنهٔ b سنگین‌تر است.

ـ با توجه به وضعیت ترازو، هر یک از نمادهای $\neq$، $>$، $<$ را در جاهای خالی فقط یک بار استفاده و وزنه‌های a و b را با هم مقایسه کنید.

$a \square b$ ، $a \square b$ ، $b \square a$

در شکل بالا چنانچه وزنه‌ای p کیلوگرمی باشد به‌طوری که $a=b+p$، در این صورت برای اینکه کفه‌های ترازو مقابل هم بایستند، باید وزنه p کیلوگرمی را روی کدام کفه قرار داد؟ کفه ای که وزنه b در آن قرار دارد.

هرگاه a و b دو عدد حقیقی باشد به‌طوری‌که $a>b$، در این صورت عدد حقیقی مثبتی مانند p هست به‌طوری که $a=b+p$.

با توجه به برابری‌های زیر مانند نمونه، یک نابرابری برای هر کدام بنویسید.

الف) $x=y+4 \Rightarrow x>y$

ب) $m+1=n+3 \Rightarrow m>n$

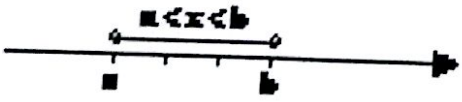
ج) $a-2=b+3 \Rightarrow a>b$

د) $2m=3n \quad (m,n>0) \quad m>n$

هرگاه a و b دو عدد حقیقی باشد، فقط یکی از حالت‌های «a بزرگ‌تر از b» یا «a کوچک‌تر از b» یا «a برابر با b» را خواهیم داشت. چنانچه عدد حقیقی a منفی نباشد در این صورت $a>0$ یا $a=0$، در این حالت می‌نویسیم $a\geq 0$ و می‌خوانیم a بزرگ‌تر یا برابر با ۰ است؛ مانند $2\geq 0$ یا $0\geq 0$ یا $\frac{1}{3}\geq 0$.

چنانچه a و b دو عدد حقیقی باشد به‌طوری‌که a از b کمتر نباشد در این صورت $a>b$ یا $a=b$ در این حالت می‌نویسیم $a\geq b$.

برای سه عدد حقیقی a و b و x به‌طوری که عدد دلخواه x بین اعداد a و b باشد $(a<b)$، می‌نویسیم $a<x<b$.



مانند : $1<2<5$

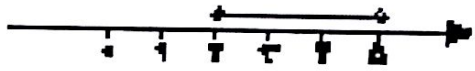
کار در کلاس

۱ــ متناظر با هر یک از ناحیه‌های مشخص شده روی محور، یک نابرابری بنویسید.

$-۳ \leq x \leq ۵$

الف)

$۲ \leq x < ۵$

ب) 

۲ــ درستی یا نادرستی هر یک از عبارت‌های زیر را بررسی کنید.

✗ الف) اگر $a+b>0$ آنگاه، a و b هر دو مثبت هستند.

✓ ب) اگر $ab>0$ آنگاه، a و b هم علامت هستند.

✗ ج) اگر $\frac{ab}{c}<0$ آنگاه، a و b و c منفی هستند.

✓ د) اگر $a^۲b<0$ آنگاه، b منفی است.

۳ــ عبارت‌های کلامی را به‌صورت جبری بنویسید.

● ۳ برابر عددی منهای یک از ۷ بزرگ‌تر است. $۳x-۱>۷$

● ۸ از قرینهٔ دو برابر عددی به‌علاوه ۳ بزرگ‌تر است. $۸>-(۲x+۳)$

فعالیت

۱ــ به‌دو طرف نابرابری زیر، عددهایی را مانند نمونه اضافه کنید. آیا نابرابری باز هم برقرار است؟ بله

$-۳<۱ \xrightarrow{+۳} -۳+۳<۱+۳ \rightarrow ۰<۴$

$-۳<۱ \xrightarrow{-۷} -۳-۷<۱-۷ \longrightarrow -۱۰<-۶$

$-۳<-۲ \xrightarrow{-۱۰۰} -۳-۱۰۰<-۲-۱۰۰ \longrightarrow -۱۰۳<-۱۰۲$

خاصیت ۱ : اگر دو طرف یک نابرابری را با عددی مانند c جمع کنیم، نابرابری همچنان برقرار است؛ یعنی اگر $a>b$ آنگاه $a+c>b+c$.

۲ــ دو طرف نابرابری زیر را در عددهای مختلف ضرب کنید؛ آیا نابرابری باز هم برقرار است؟

$-۷>-۹ \xrightarrow{\times(-۳)} ۲۱<۲۷$ $\qquad -۷>-۹ \xrightarrow{\times ۳} -۲۱>-۲۷$

$-۷ > -۹$ علامت صحیح نیست ★

★ $-۷ > -۹ \xrightarrow{\times ۰}$ $-۷ \times ۰ > -۹ \times ۰$

$-۷ < -۹ \xrightarrow{\times(-۱)}$ $۷ < ۹$

$(-۷)(-۱) < (-۹)(-۱)$

خاصیت ۲ : اگر دو طرف یک نابرابری را در عدد مثبتی مانند c ضرب کنیم، نابرابری همچنان برقرار خواهد بود؛ یعنی اگر $a>b$ و $c>۰$ آنگاه $ac>bc$.

خاصیت ۳ : اگر دو طرف نابرابری $a>b$ را در عدد منفی $c(c<۰)$ ضرب کنیم، در این‌صورت داریم $ac<bc$.

۳ــ نابرابری $۲x+۱>۷$ را درنظر بگیرید؛ این نابرابری شامل متغیر x است و درجه نسبت به x با ۱ برابر است؛ در این صورت به این نابرابری، **نامعادلهٔ یک مجهولی درجه اول** می‌گوییم.

در جدول زیر اندازه‌های داده شده را به‌جای x قرار دهید؛ آیا در هر حالت نابرابری برقرار است؟

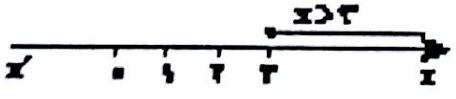
نامعادله	x=−۱	x=۲	x=۳	x=۴	x=۷
$۲x+۱>۷$	$۲(-۱)+۱>۷$ ↓ $-۱>۷$ نادرست	$۲\times۲+۱>۷$ $۵>۷$ نادرست	$۲\times۳+۱>۷$ $۷>۷$ نادرست	$۲\times۴+۱>۷$ $۹>۷$ درست	$۲\times۷+۱>۷$ $۱۵>۷$ درست

مجموعه مقادیری که به‌ازای آنها، نامعادله به نابرابری درست تبدیل شود، مجموعهٔ جواب نامعادله است. با توجه به جدول بالا، ۴ و ۷ جزو مجموعه جواب این نامعادله است. اکنون با توجه به خاصیت‌های نابرابری‌ها و پاسخ به سؤالات زیر، این نامعادله را حل کنید.

ــ دو طرف نامعادله را با ۱− جمع کنید. $۲x+۱-۱>۷-۱ \longrightarrow ۲x>۶$

ــ دو طرف نامعادلهٔ حاصل را در $\frac{۱}{۲}$ ضرب کنید یا دو طرف نامعادله را بر ۲ تقسیم کنید. $\frac{۲x}{۲}>\frac{۶}{۲} \longrightarrow x>۳$

ــ با توجه به نابرابری $x>۳$ متوجه می‌شویم که مجموعهٔ همهٔ عددهای بزرگ‌تر از ۳، مجموعه جواب این نامعادله است. چنانچه مجموعه جواب نامعادله را با D نمایش دهیم، خواهیم داشت $D=\{x\in\mathbb{R}|x>۳\}$ می‌توان مجموعه جواب این نامعادله را روی محور عددهای حقیقی به‌صورت مقابل نمایش داد.



$۲x+۱>۷ \xRightarrow{+(-۱)} ۲x>۶ \xRightarrow{\times\frac{۱}{۲}} x>۳$

سؤال ۲ ص ۹۳

$\frac{ac}{b^2} < 0$

الف
- حالت اول $\rightarrow a>0 , c<0 \longrightarrow \frac{ac}{b^2} < 0$
- حالت دوم $\rightarrow a<0 , c>0 \longrightarrow \frac{ac}{b^2} < 0$

ب $\frac{a}{bc} > 0$

ب
- حالت اول $a>0 , b<0 , c<0$
- حالت دوم $a<0 , b<0 , c>0$
- حالت سوم $a<0 , b>0 , c<0$
- حالت چهارم $a>0 , b>0 , c>0$

ج $ab>0$

ج
- حالت اول $a>0 , b>0$
- حالت دوم $a<0 , b<0$

د $\frac{a^2}{bc} > 0$

د
- حالت اول $b>0 , c>0$
- حالت دوم $b<0 , c<0$

$\boxed{۳}$

الف $2x-6+5<5-x \longrightarrow 2x-1<5-x \longrightarrow 3x<6 \longrightarrow x<2$

$D=\{x\in R \mid x<2\}$

ب $3-2x \geq 15-10x \longrightarrow -2x+10x \geq 15-3 \longrightarrow 8x \geq 12 \longrightarrow x \geq \frac{12}{8}$

$\Rightarrow x \geq \frac{3}{2} \quad , D=\{x\in R / x \geq \frac{3}{2}\}$

ج $\frac{y-3-4}{4} > \frac{y}{2} \xrightarrow{\times 4} y-7>2y \longrightarrow y-2y>7 \longrightarrow -y>7 \longrightarrow y<-7$

$D=\{y\in R \mid y<-7\}$

د $\frac{-8-q}{4} \leq \frac{1+q}{3} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} -24-3q \leq 4+4q \longrightarrow -3q-4q \leq 4+24$

$-7q \leq 28 \longrightarrow q \geq \frac{28}{-7} \longrightarrow q \geq -4 \qquad D=\{q\in R \mid q \geq -4\}$

$\frac{2}{3}x+\frac{14}{3}-\frac{x}{4}\leq\frac{3}{2}-\frac{1}{2}x+\frac{x}{9}$

$\frac{5x}{12}+\frac{14}{3}\leq\frac{-2x}{9}+\frac{3}{2}\xrightarrow{-\frac{14}{3}+\frac{2x}{9}}\frac{5x}{12}+\frac{14}{3}-\frac{14}{3}+\frac{2x}{9}\leq\frac{-2x}{9}+\frac{3}{2}-\frac{14}{3}+\frac{2x}{9}$

$\frac{9x}{12}\leq\frac{-19}{4}\xrightarrow{\times\frac{12}{9}}\frac{9x}{12}\times\frac{12}{9}\leq\frac{-19}{4}\times\frac{12}{9}\longrightarrow x\leq\frac{-38}{9}$

$D=\{x\in R\mid x\leq\frac{-38}{9}\}$

کار در کلاس

مجموعه جواب نامعادله‌های زیر را مانند نمونه به‌دست آورید.

الف) $2x+7\geq15\xrightarrow{+(-7)}2x+7-7\geq15-7\longrightarrow2x\geq8\xrightarrow{\times\frac{1}{2}}x\geq4$

$D=\{x\in R\mid x\geq4\}$

ب) $\frac{x}{3}-\frac{1}{2}<\frac{x-1}{6}\xrightarrow{\times6}6\times\frac{x}{3}-6\times\frac{1}{2}<6\times\frac{x-1}{6}$

$\rightarrow2x-3<x-1\xrightarrow{+(-x)}2x-3+(-x)<x-1+(-x)$

$\rightarrow x-3<-1\xrightarrow{+3}x<2\quad D=\{x\in\mathbb{R}\mid x<2\}$

ج) $3(x-1)\geq2x+1\xrightarrow{+3-2x}3x-3\geq2x+1$

$3x-3+3-2x\geq2x+3-2x+1$

$x\geq4\quad\{x\in R\mid x\geq4\}$

د) $\frac{2}{3}(x+7)-\frac{x}{4}\leq\frac{1}{2}(3-x)+\frac{x}{6}$ (در ادامه)

تمرین

۱ــ در جاهای خالی نمادهای $>$ یا $<$ را جایگزین کنید.

الف) $a-b=1$ در این‌صورت $a\square b$.

ب) اگر $u-v=-2$ در این صورت $u\square v$.

ج) اگر $2(p-1)=2q-3$ در این صورت $p\square q$.

د) اگر $\frac{a-b}{2}=-3$ در این صورت $a\square b$.

روش حل ☆

۲ــ علامت عددهای حقیقی a, b, c را طوری تعیین کنید که نابرابری‌های زیر برقرار باشد: (در صفحه قبل)

الف) $\frac{ac}{b^2}<0$ ب) $\frac{a}{bc}>0$ ج) $ab>0$ د) $\frac{a^2}{bc}>0$

۳ــ مجموعه جواب نامعادله‌های زیر را به‌دست آورید.

الف) $2(x-3)+5<5-x$ (در صفحه قبل)

ب) $3-2x\geq5(3-2x)$

ج) $\frac{y-3}{4}-1>\frac{y}{2}$

د) $-2-\frac{q}{4}\leq\frac{1+q}{3}$

۴ــ اگر $a^2>b^2$ آیا همواره می‌توان نتیجه گرفت، $a>b$؟ خیر

۵ــ اگر $a,b>0$ و $a^2>b^2$ نشان دهید $a>b$ (از اتحاد مزدوج کمک بگیرید). (در صفحه بعد)

۶ــ عبارت‌های کلامی زیر را به زبان ریاضی بنویسید.

الف) اگر پول علی را سه برابر کنیم، حداقل ۳۰۰ تومان از دو برابر پولش بیشتر می‌شود. $3x\geq2x+300$

ب) مجموع نصف عدد a و چهار برابر عدد b، حداکثر ۶ واحد است. $\frac{a}{2}+4b\leq6$

۷ــ دو نفر با وزن‌های ۸۵ و ۶۵ کیلوگرم به جنگلی رفتند که به منابع غذایی دسترسی ندارند. آنها همراه خود مواد غذایی برده‌اند که ۴۵۰۰ کیلوکالری دارد. اگر فرض کنیم هر انسان هر روز حداقل به اندازهٔ سه برابر وزن خود کیلوکالری نیاز دارد، آنها حداکثر چند روز می‌توانند با مواد غذایی خود در جنگل دوام بیاورند؟

مقدار مورد نیاز هر روز $۳\times۶۵ + ۳\times۸۵ = ۴۵۰$

$۴۵۰x \leq ۴۵۰۰$

$x \leq ۱۰$

a)

$$\begin{cases} a,b>0 \\ a^2>b^2 \end{cases} \longrightarrow a^2-b^2>0 \longrightarrow (a-b)(a+b)>0 \Rightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} (a-b)>0 \ , \ a+b>0 \longrightarrow \begin{cases} a-b>0 \to a>b \\ a+b>0 \to a>-b \end{cases} \\ (a-b)<0 \ , \ a+b<0 \to \text{مورد قبول نیست چون } a,b>0 \text{ هستند} \end{cases}$$