

۱- اگر  $A = \begin{bmatrix} 5|A| & |A| \\ 5 & 4|A|^2 \end{bmatrix}$  در این صورت حاصل  $(|A|^3 - 2)$  را بیابید.

پاسخ:

$$A = \begin{bmatrix} 5|A| & |A| \\ 5 & 4|A|^2 \end{bmatrix}$$

$$|A| = 20|A|^2 - 5|A| \rightarrow 20|A|^2 - 6|A| = 0 \rightarrow 2|A|(10|A|^2 - 3) = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} |A| = 0 \rightarrow |A|^2 - 3 = -3 \\ |A| = \pm \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{10}} \Rightarrow \begin{cases} \rightarrow |A|^2 - 3 = \frac{3}{10} \sqrt{\frac{3}{10}} - 3 \\ \rightarrow |A|^2 - 3 = -\frac{3}{10} \sqrt{\frac{3}{10}} - 3 \end{cases} \end{cases}$$

۲- فرض کنید  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 1 & -5 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$  یک ماتریس  $3 \times 2$  مانند  $C$  را طوری پیدا کنید که  $A + B - C = O_{3 \times 2}$

پاسخ:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 1 & -5 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{bmatrix}$$

$$A + B - C = O_{3 \times 2} \Rightarrow A + B = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 4 & -1 \\ 9 & 9 \end{bmatrix} \Rightarrow A + B = C$$

$$\Rightarrow C = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 4 & -1 \\ 9 & 9 \end{bmatrix}$$

۳- قضیه ۱ را ثابت کنید.

پاسخ:

اثبات ۱:

اگر  $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ ,  $B = [b_{ij}]_{m \times n}$  باشند داریم:

$$\begin{cases} A + B = [d_{ij}]_{m \times n}, d_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \\ B + A = [d'_{ij}]_{m \times n}, d'_{ij} = b_{ij} + a_{ij} \end{cases} \Rightarrow d_{ij} = d'_{ij} \Rightarrow [d_{ij}]_{m \times n} = [d'_{ij}]_{m \times n} \Rightarrow A + B = B + A$$

اثبات ۲: اگر  $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ ,  $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ ,  $C = [c_{ij}]_{m \times n}$  باشند داریم:

$$A + B = [d_{ij}]_{m \times n} = D \quad d_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

$$B + C = [d'_{ij}]_{m \times n} = D' \quad d'_{ij} = b_{ij} + c_{ij}$$

$$A + (B + C) = A + D' = [a_{ij}]_{m \times n} + [d'_{ij}]_{m \times n} = [a_{ij} + d'_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij} + c_{ij}]$$

$$(A + B) + C = D + C = [d_{ij}]_{m \times n} + [c_{ij}]_{m \times n} = [a_{ij} + b_{ij} + c_{ij}]_{m \times n}$$

با مقایسه روابط فوق می یابیم:

$$A + (B + C) = (A + B) + C$$

اثبات ۳: اگر  $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ ,  $\bar{O} = [e_{ij}]_{m \times n}$  باشد می دانیم  $e_{ij} = 0$  است.

$$A + \bar{O} = [a_{ij}]_{m \times n} + [e_{ij}]_{m \times n} = [a_{ij} + e_{ij}]_{m \times n} = [a_{ij}]_{m \times n} = A$$

اثبات ۴: اگر  $A = [a_{ij}]_{m \times n}$  باشد می دانیم  $-A = [-a_{ij}]_{m \times n}$  است.

$$A + (-A) = [a_{ij}]_{m \times n} + [-a_{ij}]_{m \times n} = [a_{ij} + (-a_{ij})]_{m \times n} = [0]_{m \times n} = \bar{O}$$

اثبات ۵:

$$A = [a_{ij}]_{m \times n} \Rightarrow rA = [ra_{ij}]_{m \times n}$$

$$B = [b_{ij}]_{m \times n} \Rightarrow rB = [rb_{ij}]_{m \times n}$$

$$rA + rB = [ra_{ij} + rb_{ij}]_{m \times n} = [r(a_{ij} + b_{ij})]_{m \times n}$$

از طرفی

$$A + B = [a_{ij}]_{m \times n} + [b_{ij}]_{m \times n} = [a_{ij} + b_{ij}]_{m \times n}$$

$$\Rightarrow r(A + B) = r[a_{ij} + b_{ij}]_{m \times n} = [r(a_{ij} + b_{ij})]_{m \times n}$$

با مقایسه روابط فوق می توان فهمید  $r(A + B) = rA + rB$

اثبات ۶:

$$A = [a_{ij}]_{m \times n} \Rightarrow (r + s)A = (r + s)[a_{ij}]_{m \times n}$$

$$= [(r + s)a_{ij}]_{m \times n} = [ra_{ij} + sa_{ij}]_{m \times n} = [ra_{ij}]_{m \times n} + [sa_{ij}]_{m \times n}$$

$$= r[a_{ij}]_{m \times n} + s[a_{ij}]_{m \times n} = rA + sA$$

اثبات ۷:

$$A = [a_{ij}]_{m \times n} \Rightarrow (rs)A = (rs)[a_{ij}]_{m \times n}$$

$$= [(rs)a_{ij}]_{m \times n} = [r(sa_{ij})]_{m \times n} = r[sa_{ij}]_{m \times n} = r(sA)$$

اثبات ۸:

$$A = [a_{ij}]_{m \times n} \Rightarrow 1 \times A = 1 \times [a_{ij}]_{m \times n}$$

$$= [1 \times a_{ij}]_{m \times n} = [a_{ij}]_{m \times n} = A$$

۴- اگر  $CA = C, AC = A, AB = BA = O$  نشان دهید  $C = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix}$

پاسخ:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \bar{O}$$

$$AB = BA = O \Rightarrow$$

$$BA = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \bar{O}$$

$$\Rightarrow AB = BA = \bar{O}$$

$$AC = A \Rightarrow AC = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix} \Rightarrow AC = A$$

$$CA = C \Rightarrow CA = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow CA = C$$

۵- فرض کنید  $d, c, b, a$  چهار واحد طول باشد. ماتریس زیر یک جدول تبدیل واحد است

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} a & b & c & d \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 & 24 \\ \frac{1}{3} & 1 & 2 & 8 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 1 & 4 \\ \frac{1}{24} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

بنابراین، یک واحد از  $a$ ، شش واحد از  $c$  است، یک واحد از  $b$  هشت واحد از  $d$  است، و یک واحد از  $c$  نصف واحد از  $b$  است. این جدول را به عنوان یک

ماتریس در نظر بگیرید و شرح دهید که چرا  $a_{ik}a_{kj} = a_{ij}$ . آیا می توانید بدون محاسبه ی مستقیم  $A^2$  را پیدا کنید؟

پاسخ:

می دانیم اگر هر واحد از  $a$  مساوی  $m$  واحد از  $b$  باشد پس  $a = mb$  ضمناً اگر هر واحد از  $b$  مساوی  $n$  واحد از  $c$  باشد پس  $b = nc$  حال از ترکیب روابط فوق می توان فهمید هر واحد از  $a$  مساوی  $mn$  واحد از  $c$  است

$$\begin{cases} a = mb \\ b = nc \end{cases} \Rightarrow a = (mn)c$$

حال در ماتریس داده شده به طور مثال  $a_{12}$  یعنی هر واحد از  $a$  مساوی چند واحد از  $b$  است. و  $a_{24}$  یعنی هر واحد از  $b$  چند واحد از  $d$  است بنابراین  $a_{12} \times a_{24}$  یعنی هر واحد از  $a$  چند واحد از  $d$  است که این همان مقدار  $a_{14}$  می باشد.

پس در حالت کلی می توان گفت  $a_{ik} \times a_{kj} = a_{ij}$  حال با توجه به رابطه فوق اگر  $[m_{ij}]_{4 \times 4} = A^2$  باشد

$$m_{ij} = \sum_{k=1}^4 a_{ik}a_{kj} = \sum_{k=1}^4 a_{ij} = 4a_{ij}$$

بنابراین کافی است تک تک درایه های  $A$  را در ۴ ضرب کنیم تا درایه های  $A^2$  ایجاد شوند.

۶- کارخانه ای سه محصول  $a, b, c$  را به دو بازار  $m, n$  می فروشد. تعداد واحدهای فروخته شده هر محصول در هر بازار در یک سال معین با ماتریس

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} a & b & c \end{matrix} \\ \begin{matrix} m \\ n \end{matrix} & \begin{bmatrix} 5000 & 2000 & 1500 \\ 2000 & 2000 & 1000 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

نمایش داده شده است. ماتریس های  $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$ ،  $C = \begin{bmatrix} 1,8 \\ 3,5 \\ 2,5 \end{bmatrix}$  به ترتیب، قیمت فروش و قیمت تمام شده هر واحد از  $a, b, c$  را نشان می دهند. درآیه های هر

یک از ماتریس های  $AB - AC, AC, AB$  را تعبیر کنید.

پاسخ:

$$AB = \begin{bmatrix} 5000 & 2000 & 1500 \\ 2000 & 2000 & 1000 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22500 \\ 15000 \end{bmatrix}$$

عدد ۲۲۵۰۰ میزان فروش کل محصولات در بازار  $m$  را نشان می دهد و عدد ۱۵۰۰۰ میزان فروش کل محصولات در بازار  $n$  را نشان می دهد.

$$AC = \begin{bmatrix} 5000 & 2000 & 1500 \\ 2000 & 2000 & 1000 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1,8 \\ 3,5 \\ 2,5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19750 \\ 13100 \end{bmatrix}$$

عدد ۱۹۷۵۰ میزان قیمت تمام شده محصولات در بازار  $m$  و عدد ۱۳۱۰۰ میزان قیمت تمام شده محصولات در بازار  $n$  می باشد.

$$AB - AC = \begin{bmatrix} 22500 \\ 19000 \end{bmatrix}$$

می دانیم سود یعنی از قیمت فروش تمام شده را کم می کنیم پس ۲۲۵۰۰ میزان سود فروش محصولات در بازار  $m$  و عدد ۱۹۰۰۰ میزان سود فروش محصولات در بازار  $n$  را نشان می دهد.

$$7- \text{ اگر } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \text{ نشان دهید } A^2 - 4A - 5I_3 = O$$

پاسخ:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad A^2 - 4A - 5I_3 = 0$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 8 & 8 \\ 8 & 9 & 8 \\ 8 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

$${}^r A = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 8 \\ 8 & 4 & 8 \\ 8 & 8 & 4 \end{bmatrix} \quad {}^{\delta} I_{\psi} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$A^r - {}^r A - {}^{\delta} I_{\psi} = \begin{bmatrix} 9 & 8 & 8 \\ 8 & 9 & 8 \\ 8 & 8 & 9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 8 & 8 \\ 8 & 4 & 8 \\ 8 & 8 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \bar{O}$$

۸-اگر  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$  مطلوب است محاسبه ی  $A^{10}$ .

پاسخ:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A^r = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$A^r = I \Rightarrow (A^r)^{\delta} = I^{\delta} \Rightarrow A^{10} = I$$

۹-اگر  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ، به کمک محاسبه ی توان های مختلف  $A$ ، نشان دهید عدد طبیعی  $n$  موجود است که  $A^n = O$ .

پاسخ:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A^r = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^r = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A^r = 0 \Rightarrow n = 3$$

در اینجاست ماتریس  $A$  را پوچ توان از مرتبه ۳ می گوئیم.

۱۰- به کمک تمرین قبل  $\begin{bmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}^{600}$  را محاسبه کنید.

پاسخ:

$$A = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$$

$$A = 2 \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} \cos(\frac{\pi}{6}) & -\sin(\frac{\pi}{6}) \\ \sin(\frac{\pi}{6}) & \cos(\frac{\pi}{6}) \end{bmatrix} \Rightarrow A = 2R_{\frac{\pi}{6}}$$

$$R_{\theta}^n = R_{n\theta} \Rightarrow A^{600} = 2^{600} \times R_{600 \times \frac{\pi}{6}} = 2^{600} \times \underbrace{R_{100\pi}}_{R_{\pi}} = 2^{600} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 2^{600} I = \begin{bmatrix} 2^{600} & 0 \\ 0 & 2^{600} \end{bmatrix}$$

۱۱- فرض کنید  $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 5 & -2 \end{bmatrix}$  مقدار  $|A|$  را با بسط دادن نسبت به هر یک از سطرها و ستون ها پیدا کنید. همچنین  $|A|$  را به کمک روش ساروس محاسبه کنید.

پاسخ:

سطر اول:

$$1 \times (2 - 15) - 5(-4 - 12) + 7(10 + 4) = -13 + 80 + 98 = 165$$

سطر دوم:

$$-2(-10 - 35) + (-1)(-2 - 28) - 3(5 - 20) = 90 + 30 + 45 = 165$$

سطر سوم:

$$+4(15 + 7) - 5(3 - 14) + (-2)(-1 - 10) = 165$$

ستون اول:

$$+1(2 - 15) - 2(-10 - 35) + 4(15 + 7) = 165$$

ستون دوم:

$$-5(-4 - 12) + (-1)(-2 - 28) - 5(3 - 14) = 165$$

ستون سوم:

$$+7(10 + 4) - 3(5 - 20) - 2(-1 - 10) = 165$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 5 & -2 \end{vmatrix} = (2 + 60 + 70) - (-28 - 20 + 15) = 132 + 33 = 165$$

۱۲ - قضیه ی ۲ را ثابت کنید.

پاسخ:

باید  $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$ ,  $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$  قرار دهیم  $|A|, |B|$  را با بسط بیابیم و در یکدیگر ضرب کنیم سپس ماتریس  $AB$  را تشکیل دهیم و دترمینان آن را نیز با بسط بیابیم پس از مقایسه آنها خواهیم داشت  $|AB| = |A| \times |B|$

۱۳ - فرض کنید بتوان یک ماتریس  $3 \times 3$  مانند  $A$  را به صورت حاصلضرب یک ماتریس  $3 \times 2$  در یک ماتریس  $2 \times 3$  نوشت. ثابت کنید  $|A| = 0$ .

پاسخ:

فرض کنیم  $B = \begin{bmatrix} x & y \\ p & q \\ r & s \end{bmatrix}$  و  $C = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$  در این صورت داریم:

$$A = B \times C \Rightarrow |A| = |BC| = \begin{vmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ p & q \\ r & s \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \begin{bmatrix} x & y & 0 \\ p & q & 0 \\ r & s & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \begin{bmatrix} x & y & 0 \\ p & q & 0 \\ r & s & 0 \end{bmatrix} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{vmatrix} = 0 \times 0 = 0$$

۱۴ - فرض کنید  $\lambda, \mu$  دو عدد حقیقی باشند. به کمک ویژگی های دترمینان ها، مقدار دترمینان ماتریس  $A = [\lambda i + \mu j]_{3 \times 3}$  را محاسبه کنید.

پاسخ:

$$|A| = \begin{vmatrix} \lambda + \mu & \lambda + 2\mu & \lambda + 3\mu \\ 2\lambda + \mu & 2\lambda + 2\mu & 2\lambda + 3\mu \\ 3\lambda + \mu & 3\lambda + 2\mu & 3\lambda + 3\mu \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{سطر اول را به سطر سوم اضافه می کنیم}} \begin{vmatrix} \lambda + \mu & \lambda + 2\mu & \lambda + 3\mu \\ 2\lambda + \mu & 2\lambda + 2\mu & 2\lambda + 3\mu \\ 4\lambda + 2\mu & 4\lambda + 4\mu & 4\lambda + 6\mu \end{vmatrix} = 0$$

اگر در یک ماتریس، دو سطر مساوی داشته باشیم دترمینان آن ماتریس مساوی صفر است.

۱۵ - اگر  $A = (a_1, a_2)$ ,  $B = (b_1, b_2)$ ,  $C = (c_1, c_2)$  روؤس یک مثلث از صفحه ی

$\mathbb{R}^2$  باشند، ثابت کنید مساحت مثلث  $ABC$  برابر است با قدر مطلق مقدار زیر

$$\frac{1}{2} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

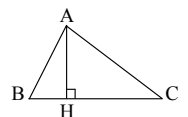
پاسخ:

برای پیدا کردن مساحت مثلث  $ABC$  باید اندازه قاعده و ارتفاع مثلث را داشته باشیم:

اندازه ارتفاع  $AH$  یعنی فاصله  $A$  از خط  $BC$

ابتدا معادله خط  $BC$  را می نویسیم.

$$\begin{cases} B(b_1, b_2) \\ C(c_1, c_2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = \frac{c_2 - b_2}{c_1 - b_1} \\ y - b_2 = \frac{c_2 - b_2}{c_1 - b_1} (x - b_1) \Rightarrow (y - b_2)(c_1 - b_1) = (c_2 - b_2)(x - b_1) \end{cases}$$



$$|AH| = \frac{|(a_2 - b_2)(c_1 - b_1) - (c_2 - b_2)(a_1 - b_1)|}{\sqrt{(c_1 - b_1)^2 + (c_2 - b_2)^2}} = \frac{|a_1(b_2 - c_2) - b_1(a_2 - c_2) + c_1(a_2 - b_2)|}{\sqrt{(c_1 - b_1)^2 + (c_2 - b_2)^2}}$$

$$|BC| = \sqrt{(c_1 - b_1)^2 + (c_2 - b_2)^2} \text{ از طرفی}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} |AH| \times |BC| = \frac{1}{2} |a_1(b_r - c_r) - b_1(a_r - c_r) + c_1(a_r - b_r)|$$

از طرفی حاصل دترمینان داده شده به صورت زیر محاسبه می شود:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_r & b_r & c_r \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = a_1(b_r - c_r) - b_1(a_r - c_r) + c_1(a_r - b_r)$$

بنابراین نصف این دترمینان با مساحت مثلث برابر است.

۱۶- نشان دهید  $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a & b & 1 \\ c & d & 1 \end{vmatrix} = 0$  معادله ی خطی است که از نقاط  $(c,d), (a,b)$  در  $\mathbb{R}^2$  می گذرد.

پاسخ:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a & b & 1 \\ c & d & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow +x(b-d) - y(a-c) + 1(ad-bc) = 0$$

$$\Rightarrow AX + By + C = 0$$

پس معادله داده شده معادله یک خط راست است.

حال وضعیت دو نقطه را در معادله چک می کنیم

$$A(a,b) \Rightarrow \begin{vmatrix} a & b & 1 \\ a & b & 1 \\ c & d & 1 \end{vmatrix} = 0 \text{ برقرار است}$$

$$B(c,d) \Rightarrow \begin{vmatrix} c & d & 1 \\ a & b & 1 \\ c & d & 1 \end{vmatrix} = 0 \text{ برقرار است}$$

پس معادله داده شده معادله یک خط راست است که از دو نقطه  $B(c,d), A(a,b)$  عبور می کند.

۱۷- اگر  $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$  مفروض باشد، حاصل  $A^3$  را به دست آورید.  
چه نتیجه ای می گیرید؟

پاسخ:

$$A^2 = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A^2 A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & 0 & 0 \\ 0 & 27 & 0 \\ 0 & 0 & 64 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-2)^3 & 0 & 0 \\ 0 & 3^3 & 0 \\ 0 & 0 & 4^3 \end{bmatrix}$$

$$A^n = \begin{bmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 0 & b^n & 0 \\ 0 & 0 & c^n \end{bmatrix} \text{ نتیجه می گیریم اگر } A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} \text{ آنگاه داریم:}$$

۱۸- دترمینان ماتریس زیر را با استفاده از دستور ساروس محاسبه کنید.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

پاسخ:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 1 & -1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow |A| = \underbrace{(4 - 9 - 8)}_{-13} - \underbrace{(3 - 12 - 8)}_{-17} = 4$$

۱۹- دترمینان ماتریس  $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$  را بر حسب سطر سوم بیابید. چه نتیجه ای می گیرید؟

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix} = d \underbrace{\begin{vmatrix} b & c \\ b & c \end{vmatrix}}_0 - e \underbrace{\begin{vmatrix} a & c \\ a & c \end{vmatrix}}_0 + f \underbrace{\begin{vmatrix} a & b \\ a & b \end{vmatrix}}_0 = 0$$

نتیجه: هرگاه دو سطر (یا ستون) در یک ماتریس مانند هم (یا مضربی از هم) باشند حاصل دترمینان صفر است.

۲۰- اگر  $A = [a_{ij}]_{3 \times 4}$  به طوری که برای  $i = j$  داشته باشیم  $a_{ij} = 7$  و برای  $i > j$  داشته باشیم  $a_{ij} = i + j$  و برای  $i < j$  داشته باشیم  $a_{ij} = i^2$  در این صورت ماتریس  $A$  را مشخص کنید.

$$a_{ij} = \begin{cases} 7 & i = j \\ i + j & i > j \\ i^2 & i < j \end{cases}$$

$$A = [a_{ij}]_{3 \times 4} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 4 & 4 \\ 4 & 5 & 7 & 9 \end{bmatrix}$$

۲۱- اگر  $A = \begin{bmatrix} 2x-y & 5 \\ z & 1 \end{bmatrix}$  و  $B = \begin{bmatrix} 3 & 2x+y \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$  در این صورت حاصل  $x+y+z$  را بیابید.

$$A = B \rightarrow \begin{bmatrix} 2x-y & 5 \\ z & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2x+y \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{cases} 2x-y=3 & \rightarrow x=2 \\ 2x+y=5 & \rightarrow y=1 \\ z=-2 \end{cases}$$

$$\rightarrow x+y+z = 2+1+(-2) = 1$$

۲۲- اگر  $A = \begin{bmatrix} 4 & a \\ b & -1 \end{bmatrix}$  و  $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$  مقادیر  $a$  و  $b$  را طوری بیابید که حاصل ضرب  $A \times B$  ماتریسی قطری باشد.

$$AB = \begin{bmatrix} 4 & a \\ b & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+3a & -8+2a \\ b-3 & -2b-2 \end{bmatrix}$$

می‌دانیم در ماتریس قطری درایه‌های بیرون قطر اصلی همگی صفر هستند. بنابراین داریم:

$$-8+2a = 0 \rightarrow a = 4$$

$$b-3 = 0 \rightarrow b = 3$$

۲۳- اگر  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$  حاصل  $A^3$  و  $A^7$  را بیابید.

$$A^2 = AA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$A^2 = I \xrightarrow{\times A} A^3 = A$$

$$A^2 = I \xrightarrow{\text{طرفین به توان ۳}} A^6 = I \xrightarrow{\times A} A^7 = A$$

۲۴- اگر  $A$  و  $B$  ماتریس‌های  $3 \times 3$  و تعویض‌پذیر باشند  $(A \times B = B \times A)$  ثابت کنید.

الف)  $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

ب)  $(A-B)(A+B) = A^2 - B^2$

الف)  $(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2 + AB + BA + B^2$

$$\xrightarrow{AB=BA} A^2 + 2AB + B^2$$

ب)  $(A-B)(A+B) = A^2 + AB - BA - B^2 \xrightarrow{AB=BA} A^2 - B^2$

۲۵- با یک مثال نقص نشان دهید که قانون حذف در ضرب ماتریس‌ها برقرار نمی‌باشد. به عبارت دیگر نشان دهید در حالت کلی از تساوی  $AB = AC$

نمی‌توان نتیجه گرفت  $B = C$ .

پاسخ:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}}_A \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}}_B = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}}_A \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}}_C$$

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, AC = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

همانطور که مشاهده می‌کنید  $AB = AC$  اما  $B \neq C$  می‌باشد.

۲۶- دو ماتریس  $3 \times 3$  مانند  $A$  و  $B$  مثال برنید که  $A \neq \bar{0}$  و  $B \neq \bar{0}$  ولی  $AB = \bar{0}$ .

پاسخ:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & c & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ c & f & g \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & c & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ c & f & g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

۲۷- وارون ماتریس  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix}$  را به دست آورید.

پاسخ:

می‌دانیم اگر  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  در این صورت وارون  $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$  از رابطه روبه‌رو به دست می‌آید. بنابراین:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ -2 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

۲۸- نشان دهید ماتریس  $B = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -7 \end{bmatrix}$  وارون ماتریس  $A = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$  است.

پاسخ:

کافیست نشان دهیم:  $AB = BA = I$ .

$$AB = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$BA = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

۲۹- قضیهٔ یکتایی وارون: وارون هر ماتریس مربعی در صورت وجود، منحصر به فرد است.

پاسخ:

فرض می‌کنیم ماتریس‌های  $B$  و  $C$  هر دو وارون  $A$  باشند؛ ثابت می‌کنیم:  $B = C$ .

$$\text{فرض فرض: } AB = BA = I$$

$$\text{فرض فرض: } AC = CA = I$$

$$B = IB = (CA)B = C(AB) = CI = C$$

۳۰- دستگاه  $\begin{cases} 3x - 4y = 1 \\ -x + 2y = 1 \end{cases}$  را با استفاده از ماتریس وارون حل کنید.

پاسخ:

$$\begin{cases} 3x - 4y = 1 \\ -x + 2y = 1 \end{cases} \rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_X = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_B$$

$$X = A^{-1}B$$

$$A^{-1} = \frac{1}{6-4} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$$

۳۱- اگر  $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$  و  $B = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$  حاصل عبارت  $2A^{-1} - 3B^{-1}$  را بیابید.



$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{14} \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow 2A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{5}{7} & -\frac{3}{7} \\ -\frac{2}{7} & \frac{4}{7} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow B^{-1} = \frac{1}{17} \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -5 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow 3B^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{17} & \frac{9}{17} \\ -\frac{15}{17} & -\frac{6}{17} \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow 2A^{-1} - 3B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{5}{7} + \frac{3}{17} & -\frac{3}{7} - \frac{9}{17} \\ -\frac{2}{7} + \frac{15}{17} & \frac{4}{7} + \frac{6}{17} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{106}{119} & -\frac{114}{119} \\ \frac{71}{119} & \frac{110}{119} \end{bmatrix}$$

۳۲- دستگاه معادلات خطی تشکیل دهید که  $A = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$  ماتریس ضرایب دستگاه بوده و  $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 10 \end{bmatrix}$  ماتریس معلومات آن باشد و سپس جواب دستگاه را با استفاده از  $A^{-1}$  بیابید.

پاسخ:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 10 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} 3x - 5y = 1 \\ 4x + 2y = 10 \end{cases}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{26} \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{13} & \frac{5}{26} \\ -\frac{2}{13} & \frac{3}{26} \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1}B \rightarrow X = \begin{bmatrix} \frac{1}{13} & \frac{5}{26} \\ -\frac{2}{13} & \frac{3}{26} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{13} + \frac{50}{26} \\ -\frac{2}{13} + \frac{30}{26} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{52}{26} \\ \frac{26}{26} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$$

۳۳- اگر  $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$  ابتدا ماتریس  $A^{-1}$  را به دست آورده و  $|A|$  را با  $|A^{-1}|$  مقایسه کنید.

پاسخ:

$$A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{4} & \frac{5}{4} \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow |A^{-1}| = \left(\frac{1}{2} \times \frac{5}{4}\right) - \left(\frac{1}{2} \times \frac{3}{4}\right) \rightarrow |A^{-1}| = \frac{5}{8} - \frac{3}{8} = \frac{1}{4} \quad (1)$$

$$|A| = (5 \times 2) - (3 \times 2) = 10 - 6 = 4 \quad (2)$$

$$(1), (2) \rightarrow |A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$$

۳۴- روی وجود و عدم وجود و تعداد جواب‌های دستگاه زیر بحث کنید و در صورت وجود، جواب را با استفاده از  $A^{-1}$  بیابید.

$$\begin{cases} 3x - 5y = -1 \\ 2x + y = 8 \end{cases}$$

پاسخ:

$$\begin{cases} 3x - 5y = -1 \\ 2x + y = 8 \end{cases} \quad \frac{3}{2} \neq -\frac{5}{1}$$

پس دستگاه یک جواب منحصر به فرد دارد.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_X = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ 8 \end{bmatrix}}_B \rightarrow X = A^{-1}B$$

$$A^{-1} = \frac{1}{13} \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{13} & \frac{5}{13} \\ -\frac{2}{13} & \frac{3}{13} \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} \frac{1}{13} & \frac{5}{13} \\ -\frac{2}{13} & \frac{3}{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{13} + \frac{40}{13} \\ \frac{2}{13} + \frac{24}{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{39}{13} \\ \frac{26}{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} x = 3 \\ y = 2 \end{matrix}$$

۳۵- به ازای چه مقادیری از  $k$  دستگاه  $\begin{cases} kx + 3y = 4 \\ x - 2y = 3 \end{cases}$  یک دسته جواب منحصر به فرد دارد؟

پاسخ:

شرط اینکه دستگاه یک جواب داشته باشد این است که ۲ خط متقاطع باشند.

$$\begin{cases} kx + 3y = 4 \\ x - 2y = 3 \end{cases}$$

بنابراین داریم:

$$\frac{k}{1} \neq \frac{3}{-2} \rightarrow k \neq -\frac{3}{2}$$

# پیاموز | Biamoz.com

بزرگترین مرجع آموزشی و نمونه سوالات درسی تمامی مقاطع

شامل انواع | نمونه سوالات | فصل به فصل | پایان ترم | جزوه |

ویدئوهای آموزشی | گام به گام | طرح درس | طرح جابر | و ...

اینستاگرام

گروه تلگرام

کانال تلگرام

برای ورود به هر پایه در سایت ما روی اسم آن کلیک کنید

## دبستان

اول	دوم	سوم	چهارم	پنجم	ششم
-----	-----	-----	-------	------	-----

## متوسطه اول

هفتم	هشتم	نهم
------	------	-----

## متوسطه دوم

دهم	یازدهم	دوازدهم
-----	--------	---------